Recherche des partitions (spectrales) minimales d'un ouvert

Corentin Léna

Université Paris-Sud

4 avril 2012

Plan

Introduction

Équation d'une membrane vibrante:

$$\begin{cases} \partial_t^2 z + c^2 \Delta z &= 0 \text{ dans } S, \\ z &= 0 \text{ sur } \partial S, \end{cases}$$

avec

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2.$$

On recherche des solutions stationnaires $z(x, y, t) = u(x, y)v(t)$. On trouve $v(t) = v_0 \cos(\omega t - \phi_0)$ et $u(x, y)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u &= \frac{\omega^2}{c^2} u \text{ dans } S, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial S. \end{cases}$$

Problème aux valeurs propres

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ouvert, borné, connexe, avec $\partial\Omega$ de classe C^1 par morceaux. On cherche λ tel que le problème au bord suivant ait des solutions non identiquement nulles.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & \lambda u \text{ dans } \Omega, \\ u & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

On obtient une suite de valeurs propres (comptées avec leur multiplicité)

$$0 < \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega) \leq \lambda_3(\Omega) \leq \cdots \leq \lambda_k(\Omega) \leq \dots$$

avec

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_k(\Omega) = +\infty$$

et une suite de fonctions propres associées $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, \dots$.

Définition des valeurs propres par un problème de minimisation:

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2}$$

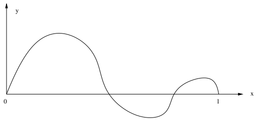
où

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \nabla u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \text{ et } u_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

avec $\|u\|^2 = \int_\Omega u^2 dx$ et $\|\nabla u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$. Les valeurs propres suivantes sont données par la formule de minimisation:

$$\lambda_k(\Omega) = \inf_{u \in \{u_1, \dots u_{k-1}\}^\perp \cap H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2}.$$

Détour par la dimension 1



Équation des cordes vibrantes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t^2 y + c^2 \partial_x^2 y & = & 0, \\ y(0,t) & = & 0, \\ y(l,t) & = & 0. \end{array} \right.$$

Solutions stationnaires:

$$y(x,t) = u(x)v(t).$$

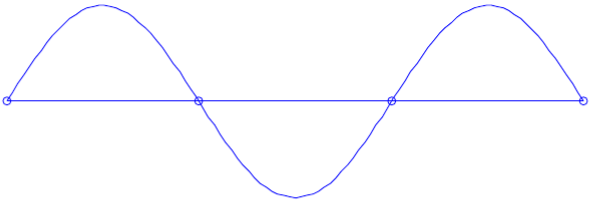
Équation aux valeurs propres associée:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\partial_x^2 u & = & \lambda u, \\ u(0) & = & 0, \\ u(l) & = & 0. \end{array} \right.$$

Valeurs propres et fonctions propres:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_k & = & \frac{k^2\pi^2}{l^2}, \\ u_k(x) & = & \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \end{array}$$

Fonction Propre pour $k = 3$



- Points où la corde est immobile: noeuds,
- points où la corde vibre: ventres.


VIBRATION GENERATOR
U56001

Domaines nodaux

Soit u une fonction propre de $-\Delta$.

Définition

L'ensemble nodal de u est défini comme l'adhérence dans $\overline{\Omega}$ de l'ensemble

$$\{x \in \Omega ; u(x) = 0\} .$$

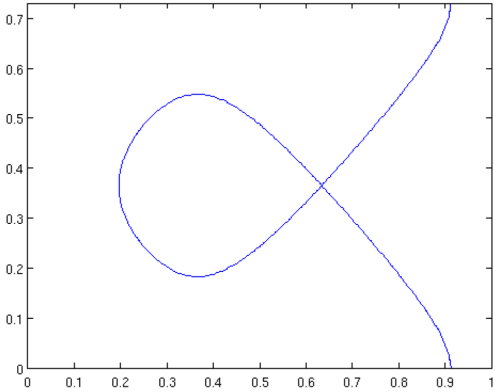
On le note $N(u)$.

Définition

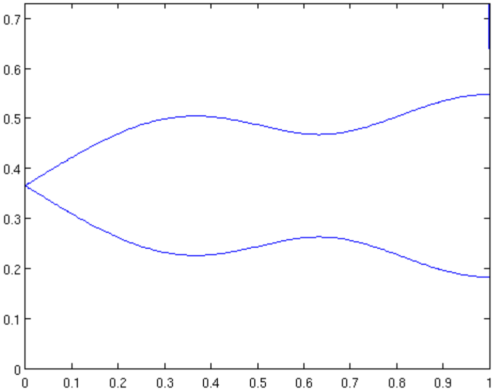
Un domaine nodal d'une fonction propre de u est une composante connexe de l'ensemble

$$\Omega \setminus N(u).$$

Ensemble nodal sur un rectangle 1



Ensemble nodal sur un rectangle 2



Notation

Si u est une fonction propre de $-\Delta$, on note $\mu(u)$ le nombre de domaines nodaux de u.

Théorème (R. Courant)

Si u est une fonction propre associée à $\lambda_k(\Omega)$, alors

$$\mu(u) \leq k.$$

Définition

Soit u une fonction propre de $-\Delta$ associée à $\lambda_k(\Omega)$. On dit que u est Courant-stricte lorsque $\mu(u) = k$.

Théorème (A. Pleijel)

Seul un nombre fini de valeurs propres du laplacien de Dirichlet sur Ω ont des fonctions propres Courant-strictes.

D'après l'inégalité de Faber-Krahn, si λ est une valeur propre dont une fonction propre associée a k domaines nodaux,

$$\lambda \geq \frac{\pi j^2 k}{|\Omega|}$$

avec j le premier zéro de la fonction de Bessel J_0, $j \simeq 2.4048$.
D'autre part la loi de Weyl donne

$$\lambda_k(\Omega) \sim \frac{4\pi k}{|\Omega|}.$$

Partition

Définition

Une k-partition de Ω *est un ensemble fini* $\mathcal{P} = \{D_i; 1 \leq i \leq k\}$ *tel que*

(i) D_i *est un sous-ensemble mesurable non vide de* Ω,

(ii) $D_i \cap D_j = \emptyset$ *dès que* $i \neq j$.

Définition

La k-partition $\mathcal{P} = \{D_i \ : \ 1 \leq i \leq k\}$ *est dite*

(i) *connexe si tout les* D_i *sont connexes,*

(ii) *ouverte si tout les* D_i *sont ouverts.*

Notation

On note $\mathfrak{P}_k$ *l'ensemble des k-partitions ouvertes et connexes.*

Définition

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'énergie de $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}_k$ par

$$\Lambda(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_1(D_i).$$

Définition

Une partition $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}_k$ est dite minimale lorsque

$$\Lambda(\mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{P}_k} \Lambda(\mathcal{Q}).$$

On note $\mathfrak{L}_k(\Omega)$ cette borne inférieure.

Définition

Une partition $\mathcal{P} = \{D_i \ : \ 1 \leq i \leq k\}$ *est dite* *complète* *lorsque*

$$\overline{\Omega} = \overline{\bigcup_{i=1}^{k} D_i}.$$

Définition

On définit le *bord* *d'une partition complète* $\mathcal{P}$ *par*

$$N(\mathcal{P}) = \overline{\bigcup_{i=1}^{k} \partial D_i \cap \Omega}.$$

Définition

On dit que la partition complète $\mathcal{P}$ *est* *régulière* *lorsque* $N = N(\mathcal{P})$ *vérifie les propriétés suivantes.*

(i) *L'ensemble* $\Omega \cap N$ *est localement une courbe* $\mathcal{C}^{1,1-}$, *sauf en un ensemble fini de points* S_{int}.

(ii) *À chaque point* $x \in S_{int}$ *est associé un entier* $\nu(x) \geq 2$ *tel que dans un voisinage de* x, *l'ensemble* N *est la réunion de* $v(x)$ *demi-courbes de classe* $\mathcal{C}^{1,+}$ *ayant leur extrémité en* x.

Définition

(iii) *L'ensemble* $S_{bd} = \partial\Omega \cap N$ *est fini. Si* $z \in S_{bd}$*, il existe un entier* $\rho(z) \geq 1$ *tel qu'au voisinage de* z*, l'ensemble* N *consiste en* $\rho(z)$ *demi-courbes* $\mathcal{C}^{1,+}$ *contenues dans* $\overline{\Omega}$ *et qui rencontrent la frontière* $\partial\Omega$ *en* z*.*

(iv) *En chaque point singulier de* $\Omega \cap N$*, les demi-courbes forment des angles égaux.*

(v) *En chaque point de* $N \cap \partial\Omega$ *les demi-courbes et* $\partial\Omega$ *forment des angles égaux.*

Existence et régularité d'une partition minimale

Théorème (Conti - Terracini - Verzini)

Pour tout entier $k \geq 1$, il existe une k-partition minimale complète et régulière de l'ouvert Ω.

Théorème (Helffer - Hoffman-Ostenhof - Terracini)

Toute partition minimale est régulière.

Partitions nodales

L'ensemble des domaines nodaux d'une fonction propre est une partition ouverte, connexe, complète et régulière de Ω. On parle de partition nodale associée à cette fonction propre.
Pour $k \geq 1$, on note $L_k(\Omega)$ la plus petite valeur propre dont une des fonctions propres a k domaines nodaux. S'il n'y en a aucune, on pose $L_k(\Omega) = +\infty$.

Proposition

On a, pour tout $k \geq 1$,

$$\lambda_k(\Omega) \leq \mathfrak{L}_k(\Omega) \leq L_k(\Omega).$$

Définition

Soit $\mathcal{P} = \{D_i \;:\; 1 \leq i \leq k\}$ *une partition de* Ω*. On dit que deux domaines distincts* D_i *et* D_j *sont voisins lorsque l'ensemble*

$$D_{ij} = Int\left(\overline{D_i \cup D_j}\right) \setminus \partial\Omega$$

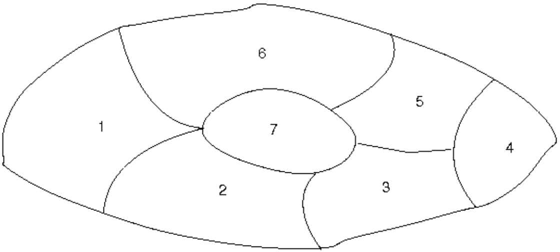
est connexe.

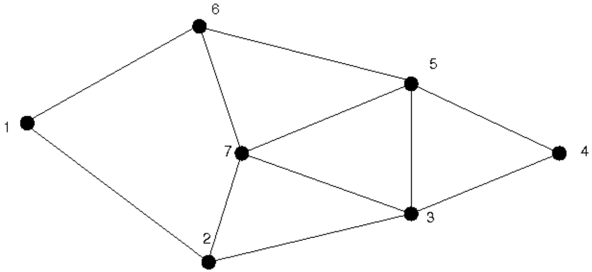
Définition

Soit $\mathcal{P} = \{D_i \;:\; 1 \leq i \leq k\} \in \mathfrak{P}_k$*. Le graphe de voisinage de* $\mathcal{P}$*, noté* $G(\mathcal{P})$*, est un graphe non orienté défini de la manière suivante.*

- *À chaque domaine* D_i *est associé un sommet* s_i*,*
- *l'arête* $\{s_i, s_j\}$ *existe si, et seulement si, les domaines* D_i *et* D_j *sont voisins.*

Une partition et son graphe de voisinage





On dit qu'un graphe est biparti lorsque deux couleurs suffisent à le colorier sans que deux sommets voisins n'aient la même couleur.
Le graphe de voisinage d'une partition nodale est biparti.

Théorème (Helffer - Hoffman-Ostenhof - Terracini)

Si le graphe d'une partition minimale est biparti, la partition est nodale.

Rappel : $\lambda_k(\Omega) \leq \mathfrak{L}_k(\Omega) \leq L_k(\Omega)$.

Théorème (Helffer - Hoffman-Ostenhof - Terracini)

Si $\mathfrak{L}_k(\Omega) = L_k(\Omega)$ ou $\mathfrak{L}_k(\Omega) = \lambda_k(\Omega)$, alors

$$\lambda_k(\Omega) = \mathfrak{L}_k(\Omega) = L_k(\Omega).$$

Corollaire

Soit $\mathcal{P}$ une partition nodale de Ω associée à la fonction propre u. La partition $\mathcal{P}$ est minimale si, et seulement si, u est Courant-stricte.

Valeurs propres et fonctions propres du secteur

$$\Sigma_\alpha = \left\{ (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \;\middle|\; 0 < \rho < 1 \text{ and } -\frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

En coordonnées polaires, le laplacien s'écrit

$$-\Delta = -\partial_\rho^2 - \frac{1}{\rho}\partial_\rho - \frac{1}{\rho^2}\partial_\theta^2.$$

Séparation des variables: $u(\rho,\theta) = f(\rho)g(\theta)$.

$$g(\theta) = \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$-\frac{d^2 f}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} + \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2\rho^2} f = \lambda f$$

On pose $\lambda = r_0^2$, $r = r_0\rho$ et $\varphi(r) = f(\rho)$.
Équation de Bessel:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi''(r) + \frac{1}{r}\varphi'(r) + \left(1 - \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2 r^2}\right)\varphi(r) & = & 0 \\ \varphi(0) & = & 0 \\ \varphi(r_0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Valeurs propres : $\lambda_{m,n}(\alpha) = (j_{m\nu,n})^2$ $(\nu = \pi/\alpha)$.
Fonctions propres : $u^{\alpha}_{m,n}(\rho,\theta) = J_{m\nu}(j_{m\nu,n}\rho)\sin(m\nu\theta)$.
La fonction propre $u^{\alpha}_{m,n}$ a $n \times m$ domaines nodaux.

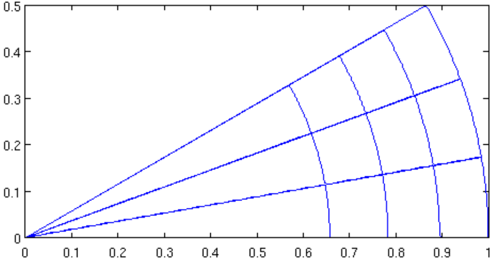
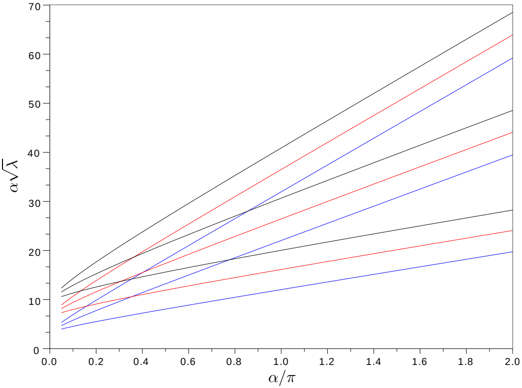


Figure : Ensemble nodal de $u_{3,4}$

Tracé des valeurs propres



Approximation par l'opérateur d'Airy

On considère l'opérateur différentiel

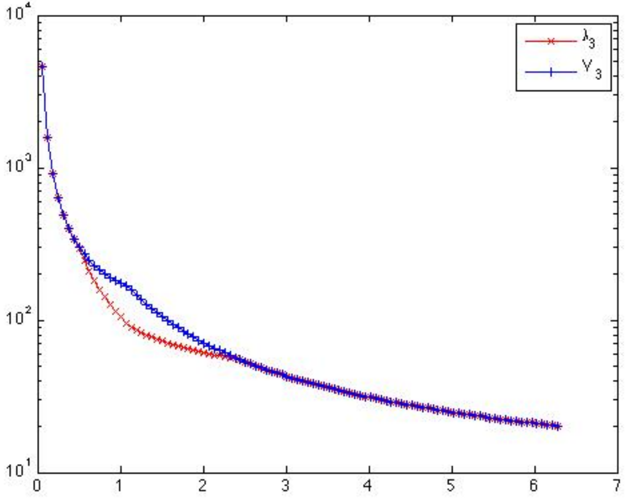
$$A = -\frac{d^2}{d\tau^2} + \tau \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

avec condition de Dirichlet. Il est à résolvante compacte et a le spectre discret $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \cdots < \mu_n < \ldots$.
Développement asymptotique:

$$\lambda_{m,n}(\alpha) = \frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} + \frac{(2m^2\pi^2)^{2/3}}{\alpha^{4/3}}\mu_n + O\left(\alpha^{-2/3}\right).$$

On en conclut que pour tout $k_0 \geq 1$, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour $0 < \alpha \leq \alpha_0$ et $1 \leq k \leq k_0$, les k-partitions minimales de Σ_α sont nodales.

Encadrement pour $\mathfrak{L}_3(\alpha)$

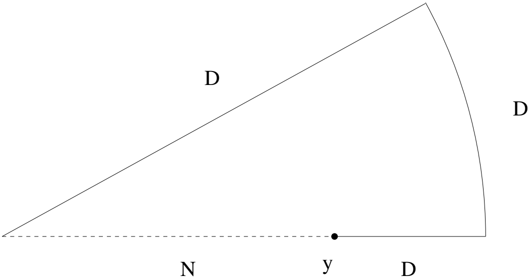


$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,3}(\alpha_1) &= \lambda_{2,1}(\alpha_1)\\
\lambda_{2,1}(\alpha_2) &= \lambda_{1,2}(\alpha_2)\\
\lambda_{1,3}(\alpha_3) &= \lambda_{3,1}(\alpha_3)\\
\lambda_{1,2}(\alpha_4) &= \lambda_{3,1}(\alpha_4)
\end{aligned}
$$

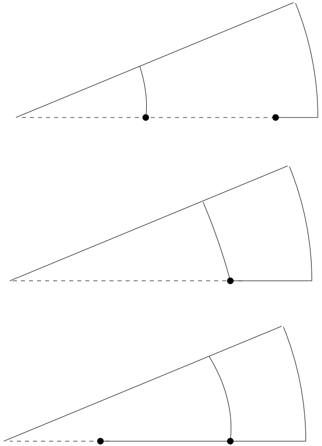
Résultats numériques.

	ν	α	j	λ
1	6.332825	0.4960808	17.433127	303.9139
2	2.8307303	1.109817	12.781964	163.3786
3	2.8238233	1.1125316	9.527567	90.774533
4	1.2884922	2.438193	7.4274555	55.167095

On ramène la recherche d'une 3-partition symétrique d'un type donné à l'étude de la deuxième valeur propre d'un problème mixte.



Recherche d'une 3-partition symétrique



3-partition symétrique avec $\alpha = 0.5$

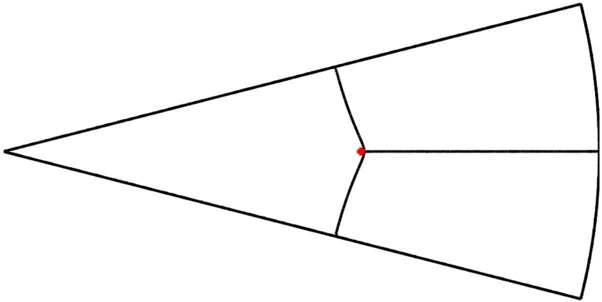
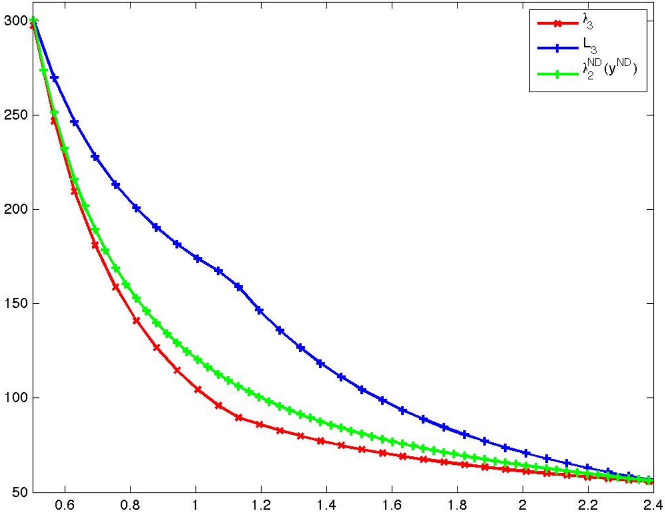
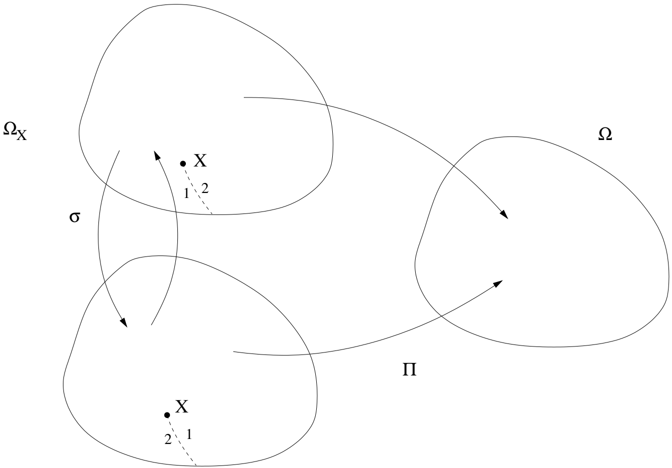


Figure : 3-partition d'énergie $\Lambda_3 \approx 302.66$

Encadrement pour $\mathfrak{L}_3(\alpha)$



Passage au revêtement

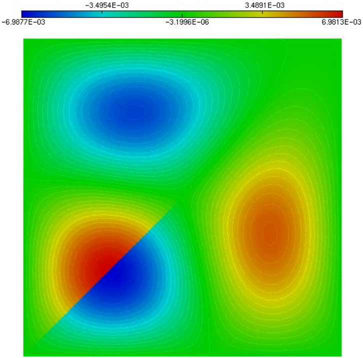


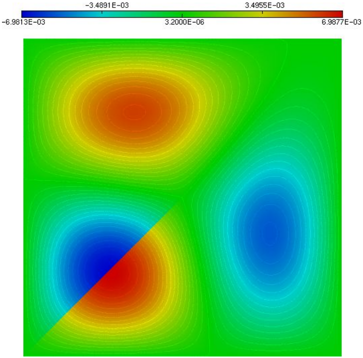
On a la décomposition

$$L^2(\Omega_X) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$$

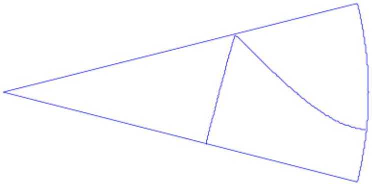
avec $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ respectivement ensemble des fonctions symétriques et antisymétrique par l'action de σ.
Comme $-\Delta$ est invariant par l'action de σ, on a la même décomposition pour chaque espace propre.
Les domaines nodaux d'une fonction antisymétrique sur Ω_X peuvent donner une partition non nodale sur Ω par projection par Π.

Exemple sur le revêtement d'un carré





Transition en $\lambda_{1,3}(\alpha) = \lambda_{2,1}(\alpha)$



On trouve numériquement $\rho \simeq 0.6558$ pour le point singulier.

3-partition du secteur avec $\alpha = 0.5$

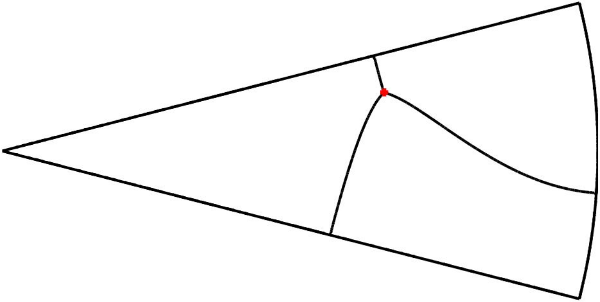


Figure : 3-partition d'énergie $\Lambda_3 \approx 300.90$

Encadrement pour $\Lambda_3(\alpha)$