

Partitions minimales d'un tore plat

Exposé au GT Calcul des Variations

Corentin Léna

Université Paris-Sud

13 octobre 2013

- 1 Partitions minimales
- 2 Tores plats
- 3 Amélioration dans le cas impair
- 4 Étude numérique

- 1 Partitions minimales
- 2 Tores plats
- 3 Amélioration dans le cas impair
- 4 Étude numérique

Partitions

- Ω domaine de dimension 2 (ouvert à bord régulier ou variété compacte).
- Si $D \subset \Omega$, $\lambda_1(D)$ première valeur propre du laplacien de Dirichlet $-\Delta_D$.

Problème de partition minimale : pour k entier fixé, on cherche D_1, \dots, D_k ouverts deux à deux disjoints qui minimisent

$$F(\lambda_1(D_1), \dots, \lambda_1(D_k))$$

Choix possibles pour F :

- $\sum_{i=1}^k \lambda_i(D_i)$
- $\sum_{i=1}^k \lambda_i(D_i)^p$ avec $1 < p < \infty$
- $\max_{1 \leq i \leq k} \lambda_1(D_i)$

Existence et régularité

Existence : Bucur, Butazzo, Henrot, 1998, Conti, Terracini, Verzini, 2005

Régularité : Caffarelli, Lin, 2007, Helffer, Hoffmann-Ostenhof, Terracini 2009.

Théorème (Helffer - Hoffmann-Ostenhof - Terracini, 2009)

Pour tout entier $k \geq 1$, il existe une k -partition minimale de Ω . De plus, toutes les partitions minimales sont régulières.

Régularité :

- les domaines remplissent Ω ;
- les frontières sont des courbes régulières sauf en un nombre fini de points ;
- les frontières forment des angles égaux aux points multiples.

Pour le maximum, les partitions minimales sont équispectrales :

$$\lambda_1(D_1) = \dots = \lambda_1(D_k).$$

Définitions et notations

- k -partition : famille de k domaines de Ω deux à deux disjoints,

$$\mathcal{D} = (D_i)_{1 \leq i \leq k}.$$

- énergie d'une k -partition :

$$\Lambda_k(\mathcal{D}) = \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_1(D_i).$$

- énergie minimale d'une k -partition de Ω :

$$\mathfrak{L}_k(\Omega) = \min_{\mathcal{D}} \Lambda_k(\mathcal{D}).$$

Proposition

Soit $\mathcal{D} = (D_i)_{1 \leq i \leq k}$ une k -partition régulière et équispectrale d'énergie Λ . Alors $\lambda_k(\Omega) \leq \Lambda$.

- $\lambda_k(\Omega)$ k -ième valeur propre de $-\Delta_\Omega$.
- Reformulation d'un résultat de Courant : une fonction propre associée à $\lambda_k(\Omega)$ a au plus k domaines nodaux.
- Si \mathcal{D} est une k -partition formée de domaines nodaux d'une fonction propre de $-\Delta_\Omega$ (partition nodale) et si elle est associée à $\lambda_k(\Omega)$, alors \mathcal{D} est minimale.

Démonstration

- Pour $1 \leq i \leq k$, u_i fonction propre de $-\Delta_{D_i}$ associé à $\lambda_1(D_i) = \Lambda$.
- Pour $1 \leq j \leq k - 1$, φ_j fonction propre de $-\Delta_\Omega$ associée à $\lambda_j(\Omega)$.
- $u_\alpha = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$

On a $\frac{\|\nabla u_\alpha\|^2}{\|u_\alpha\|^2} = \Lambda$ et $\langle u_\alpha, \varphi_j \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle u_i, \varphi_j \rangle$.

On choisit $\alpha \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ tel que $\langle u_\alpha, \varphi_j \rangle = 0$.

Alors

$$\lambda_k(\Omega) = \inf_{u \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}\}^\perp \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2} \leq \frac{\|\nabla u_\alpha\|^2}{\|u_\alpha\|^2} = \Lambda.$$

Partitions nodales

- Partition nodale : partition formée des domaines nodaux d'une fonction propre de $-\Delta_\Omega$.
- Domaines voisins dans une partition régulière : D_i et D_j avec $i \neq j$ tels que $\text{Int}(\overline{D_i \cup D_j})$ est connexe.
- Partition bipartie : on peut colorier les domaines avec deux couleurs seulement de sorte que deux voisins aient des couleurs différents.

Théorème (Helffer - Hoffmann-Ostenhof - Terracini, 2009)

Soit \mathcal{D} une partition minimale de Ω . Elle est nodale si et seulement si elle est bipartie.

Théorème (Helffer - Hoffmann-Ostenhof - Terracini, 2009)

Soit \mathcal{D} une k -partition minimale de Ω . Si elle est nodale, $\Lambda_k(\mathcal{D}) = \lambda_k(\Omega)$.

- 1 Partitions minimales
- 2 Tores plats
- 3 Amélioration dans le cas impair
- 4 Étude numérique

Tore plat

Tore plat : $T(a, b) = (\mathbb{R}/a\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/b\mathbb{Z})$, avec $0 < b \leq a$.

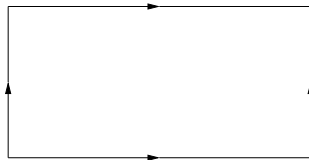



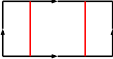
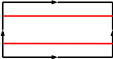
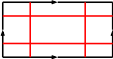
Figure : Tore plat

Il s'identifie à $]0, a[\times]0, b[$ avec conditions au bord périodiques.

Valeurs propres et fonctions propres

Valeurs propres de $-\Delta$ sur $T(a, b)$:

$$\lambda_{m,n}(a, b) = 4\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Indices	Multiplicité	Ensemble nodal (exemple)
$m = n = 0$	1	$m = 0, n = 0.$ 
$m > 0$ et $n = 0$	2	$m = 1, n = 0.$ 
$m = 0$ et $n > 0$	2	$m = 0, n = 1.$ 
$m > 0$ et $n > 0$	4	$m = 1, n = 1.$ 

Partition minimale d'un tore fin

Pour $k \geq 1$, $\mathcal{D}_k(1, b)$ k -partition de $T(1, b)$ avec :

$$D_i = \left] \frac{i-1}{k}, \frac{i}{k} \right[\times]0, b[\text{ pour } 1 \leq i \leq k.$$

On a $\Lambda_k(\mathcal{D}_k(1, b)) = k^2 \pi^2$.

Définition

$b_k = \sup\{b : \forall t \in]0, b[, \mathcal{D}_k(1, t) \text{ est une partition minimale de } T(1, t)\}$.

Théorème (Helffer, Hoffmann-Ostenhof, 2012)

- k pair : $b_k = 2/k$.
- k impair : $b_k \geq 1/k$.

Démonstration I

On suppose $k = 2\ell$.

- $\mathcal{D}_k(1, b)$ partition nodale associée à la valeur propre $\lambda_{\ell,0}(1, b)$.
- $\mathcal{D}_k(1, b)$ minimale si et seulement si $\lambda_{\ell,0}(1, b) = \lambda_k(T(1, b))$.
- Il y a $k - 1$ valeurs propres (avec multiplicités) inférieures à $\lambda_{\ell,0}(1, b) = k^2\pi^2$:

$$0 = \lambda_{0,0}(1, b) < \lambda_{1,0}(1, b) < \cdots < \lambda_{\ell-1,0}(1, b).$$

- $\lambda_{\ell,0}(1, b) = \lambda_k(T(1, b))$ si et seulement si $\lambda_{\ell,0}(1, b) \leq \lambda_{0,1}(1, b)$, c'est à dire

$$k^2\pi^2 \leq \frac{4\pi^2}{b^2}.$$

Démonstration II

Lemme

Si $D \subset T(1, b)$ est homéomorphe à un disque, $\lambda_1(D) \geq \frac{\pi^2}{b^2}$.

Preuve :

- passage au revêtement

$$\begin{aligned} \Pi_\infty : \mathbb{R}^2 &\rightarrow T(1, b) \\ (x, y) &\mapsto (x \bmod 1, y \bmod b). \end{aligned}$$

- D_0 une des composantes connexes de $\Pi_\infty^{-1}(D)$.
- D_0^* réarrangement de Steiner par rapport à $\{y = 0\}$, contenu dans $S_b = \mathbb{R} \times]-b/2, b/2[$.
- Conclusion :

$$\frac{\pi^2}{b^2} \leq \lambda_1(D_0^*) \leq \lambda_1(D_0) = \lambda_1(D).$$

Conséquence : si $b < 1/k$, une partition minimale de $T(1, b)$ ne contient aucun disque.

Démonstration III

- Passage au revêtement

$$\begin{aligned}\Pi : T(2, 2b) &\rightarrow T(1, b) \\ (x, y) &\mapsto (x \bmod 1, y \bmod b).\end{aligned}$$

- Une partition \mathcal{D} de $T(1, b)$ donne une partition $\Pi^{-1}(\mathcal{D})$ de $T(2, 2b)$.
- Domaines : composante connexe des images réciproques de domaines.
- Même énergie.

Lemme

Si \mathcal{D} est une k -partition régulière de $T(1, b)$ qui ne contient aucun disque, $\Pi^{-1}(\mathcal{D})$ est une $2k$ -partition de $T(2, 2b)$.

Conclusion : Soit $b < 1/k$ et \mathcal{D} une k -partition minimale de $T(1, b)$. \mathcal{D} ne contient pas de disque, donc $\Pi^{-1}(\mathcal{D})$ est une $2k$ -partition de $T(2, 2b)$. Cas pair : $b < \frac{1}{k} = \frac{2}{2k}$, donc $\Lambda_k(\mathcal{D}) = \Lambda_{2k}(\Pi^{-1}(\mathcal{D})) \geq \Lambda_{2k}(\mathcal{D}_{2k}(2, 2b)) = k^2 \pi^2$.

Preuve du lemme

- Formule d'Euler :

$$\sum_{i=1}^k \chi(D_i) = \sum_{x \text{ point multiple}} \left(\frac{\nu(x)}{2} - 1 \right).$$

- Si \mathcal{D} n'a pas de disque, \mathcal{D} n'a pas de point multiple.
- Les frontières sont homotopes, caractérisées par (p, q) premiers entre eux.
- L'image réciproque d'une courbe frontière est une courbe dans $T(2, 2b)$ caractérisée par $(2p, 2p)$, qui a donc deux composantes connexes.
- $\Pi^{-1}(\mathcal{D})$ est donc une $2k$ -partition.

Si p et q sont tous deux impairs, on doit faire un relèvement sur $T(2, 2b)$ pour obtenir une $2k$ -partition. Si q est pair, un relèvement sur $T(2, b)$ suffit, si p est pair sur $T(1, 2b)$.

- 1 Partitions minimales
- 2 Tores plats
- 3 Amélioration dans le cas impair**
- 4 Étude numérique

Faber-Krahn dans une bande

Problème de minimisation :

$$J(b, A) = \inf_{\Omega \subset S_b, |\Omega| \leq A} \lambda_1(\Omega),$$

avec

$$S_b = \mathbb{R} \times]-b/2, b/2[.$$

- $J(b, A)$ est décroissante par rapport à b et A .
- $J(b, A) \geq \frac{\pi^2}{b^2}$.
- Homothétie $(x, y) \mapsto \frac{1}{b}(x, y)$ donne $J(b, A) = b^{-2} J(1, \frac{1}{b^2} A)$: on peut se ramener à une bande de largeur 1.
- Le disque d'aire A a pour rayon $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Si $\sqrt{\frac{A}{\pi}} \leq \frac{b}{2}$, ce disque est contenu dans S_b et alors $J(b, A) = \frac{\pi J^2}{A}$ (inégalité de Faber-Krahn).
- Il existe Ω^* quasi-ouvert tel que $\lambda_1(\Omega^*) = J(b, A)$, et $|\Omega^*| = A$ (résultat d'existence de Bucur, 2000).

Application

Pour affiner la démonstration, on cherche

$$b_k^{FK} = \sup \{ b \in (0, 1] : J(b, b) > k^2 \pi^2 \}.$$

On a $J(b, b) \geq \frac{\pi^2}{b^2}$, donc $b_k^{FK} \geq \frac{1}{k}$.

Lemme

$$\frac{1}{k} < b_k^{FK} < \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Démonstration I

On a $J(b, b) = b^{-2} J(1, \frac{1}{b})$. On pose

$$F(b) := J\left(1, \frac{1}{b}\right) = \inf_{\Omega \subset S_1, |\Omega| \leq 1/b} \lambda_1(\Omega).$$

- $b \mapsto F(b)$ est croissante.
- Soit Ω^* minimiseur, $|S_1 \setminus \Omega^*| = \infty$, donc $F(b) = \lambda_1(\Omega^*) > \pi^2$.
- $b \mapsto F(b)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

En effet, soient $0 < b_1 \leq b < b' \leq b_2$ et Ω^* pour $F(b)$. $\Omega' = \sqrt{\frac{b}{b'}} \Omega^* \subset S_1$, $|\Omega'| = 1/b'$ et $\lambda_1(\Omega') = \frac{b'}{b} \lambda_1(\Omega^*)$. Ainsi

$$0 \leq F(b') - F(b) \leq \frac{b'}{b} F(b) - F(b) \leq \frac{F(b_2)}{b_1} (b' - b).$$

Donc $b \mapsto J(b, b)$ continue et $J(1/k, 1/k) > k^2 \pi^2$, donc $b_k^{FK} > 1/k$.

Démonstration II

- $\Omega :=] - 1/2, 1/2[\times] - b/2, b/2[$;
- $\Omega \subset S_b$;
- $|\Omega| = b$;
- $\lambda_1(\Omega) = \pi^2 \left(1 + \frac{1}{b^2}\right)$, fonction propre associée :

$$u(x, y) = \cos(\pi x) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right);$$

- Ω n'est pas minimal car $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|$ n'est pas constante sur $\partial\Omega \cap S_b$.

Ainsi $J(b, b) < \pi^2 \left(1 + \frac{1}{b^2}\right)$, donc $J(b, b) < k^2 \pi^2$ si $b \geq \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}$, donc

$$b_k^{FK} < \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Antisymétrie

- On définit une symétrie $\sigma : T(2, 2b) \rightarrow T(2, 2b)$ par

$$\sigma(x, y) = (x + 1 \pmod{2}, y).$$

- u symétrique si $u \circ \sigma = u$, antisymétrique si $u \circ \sigma = -u$.
- \mathcal{S}^+ (resp. \mathcal{S}^-) sous-espace des fonctions symétriques (resp. antisymétriques).
- Décomposition orthogonale :

$$L^2(T(2, 2b)) = \mathcal{S}^+ \oplus \mathcal{S}^-.$$

- $-\Delta(u \circ \sigma) = (-\Delta u) \circ \sigma$, donc $(\lambda_k(T(2, 2b))) = (\lambda_k^+) \cup (\lambda_k^-)$, avec λ_k^+ spectre de $(-\Delta)|_{\mathcal{S}^+}$ et λ_k^- spectre de $(-\Delta)|_{\mathcal{S}^-}$.
- u antisymétrique : les domaines nodaux se groupent par couples (D^+, D^-) avec $u > 0$ sur D^+ , $u < 0$ sur D^- , $\sigma(D^+) = D^-$ et $\Pi(D^+) = \Pi(D^-)$.

Partitions antisymétriques

D'après la méthode de Helffer - Hoffmann-Ostenhof - Terracini, 2009 (sur la sphère).

Définition

La partition régulière $\mathcal{D} = (D_i)_{1 \leq i \leq N}$ de $T(2, 2b)$ est antisymétrique si $\sigma(D_i) = D_j$ avec $j \neq i$ pour tout $1 \leq i \leq N$.

Dans ce cas, $N = 2k$ et on peut regrouper les domaines en k couples (D_i^+, D_i^-)

Proposition

Soit \mathcal{D} une $2k$ -partition régulière, antisymétrique et équispectrale d'énergie Λ . On a $\lambda_k^- \leq \Lambda$.

Preuve : Si u_i^+ fonction propre de $-\Delta_{D_i^+}$ associée à $\lambda_1(D_i^+) = \Lambda$, alors $u_i^- := u_i^+ \circ \sigma$ fonction propre de $-\Delta_{D_i^-}$ associée à Λ . Alors $u_i = u_i^+ - u_i^-$ fonction antisymétrique telle que $\frac{\|\nabla u_i\|^2}{\|u_i\|^2} = \Lambda$. On poursuit comme dans la preuve du théorème de Courant.

Conclusion

Proposition

Si k est impair et $b < b_k^{FK}$, alors $\mathcal{D}_k(1, b)$ est une partition minimale de $T(1, b)$.

Démonstration :

- \mathcal{D} partition minimale de $T(1, b)$ ne contient aucun disque.
- $\Pi^{-1}(\mathcal{D})$ est une $2k$ -partition de $T(2, 2b)$.
- $\Pi^{-1}(\mathcal{D})$ est équispectrale d'énergie $\Lambda_k(\mathcal{D})$ et antisymétrique, donc

$$\lambda_k^- \leq \Lambda_k(\mathcal{D}).$$

Les valeurs propres antisymétriques de $T(2, 2b)$ sont les $\lambda_{2p+1, q}(2, 2b)$. Notons $k = 2\ell + 1$. Il y a $k - 1$ valeurs propres inférieures à $\lambda_{k, 0}(2, 2b) = k^2\pi^2$ (avec multiplicités) :

$$\lambda_{1, 0}(2, 2b) < \lambda_{3, 0}(2, 2b) < \cdots < \lambda_{2\ell-1, 0}(2, 2b).$$

Comme $b < \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$, on a $\lambda_{k, 0}(2, 2b) < \lambda_{1, 1}(2, 2b)$, donc $\lambda_k^- = k^2\pi^2$.

Extensions : partitions antisymétriques

Proposition

Soit k impair. Si $b < \frac{2}{\sqrt{k^2-1}}$ et si \mathcal{D} est une k -partition régulière et équispectrale telle que $\Pi^{-1}(\mathcal{D})$ est une $2k$ -partition de $T(2, b)$,

$$k^2\pi^2 \leq \Lambda_k(\mathcal{D}).$$

Proposition

Soit \mathcal{D} une $2k$ -partition de $T(2, b)$ qui est

- nodale et associée à une fonction propre antisymétrique ;
- minimale parmi les partitions antisymétrique .

Alors \mathcal{D} est associée à la valeur propre λ_k^- .

Corollaire

Si k impair, $b_k \leq \frac{2}{\sqrt{k^2-1}}$.

Extension : Faber-Krahn dans une bande

Réarrangement de Steiner : on peut supposer les minimiseurs symétriques par rapport à $\{y = 0\}$ et $\{x = 0\}$. On peut aussi supposer

$$\Omega^* \cap \{y > 0\} \cap \{x > 0\} = \{0 < y < f(x)\},$$

avec $f :]0, +\infty[\rightarrow [0, b/2]$ décroissante.

Si on montre qu'un minimiseur qui n'a pas de contact avec le bord de S_b est un disque, on en déduit que si $b < \frac{4}{\pi}$, il y a contact.

Si Ω^* est convexe, on montre

$$\Omega^* \subset]-1, 1[\times]-b/2, b/2[$$

donc

$$J(b, b) \geq \pi^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Ceci impliquerait $b_k^{FK} \geq \frac{1}{\sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}}$.

Plan

- 1 Partitions minimales
- 2 Tores plats
- 3 Amélioration dans le cas impair
- 4 Étude numérique

Relaxation du problème. On note $T = T(a, b)$ et \mathcal{D} une k -partition de T .

- Dans l'expression de l'énergie, on remplace le max par une norme ℓ^p :

$$\Lambda_p(\mathcal{D}) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_1(D_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- On remplace les k -partitions de T par des k -uplets de fonctions sur T ,

$$\tilde{\mathfrak{F}}_k(T) = \{ \mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k); f_i : T \rightarrow [0, 1] \text{ mesurable,}$$

$$\sum_{i=1}^k f_i(x) = 1 \text{ p.p.} \}.$$

- On remplace $\lambda_1(D_i)$ par $\lambda_1(f_i, \varepsilon)$ première valeur propre de l'opérateur $-\Delta + \frac{1}{\varepsilon}(1 - f_i)$ sur T (avec $\varepsilon \ll 1$).

- Problème discretisé : les k -uplets de fonctions sont remplacés par une famille de k vecteurs et le laplacien par son approximation par **différences finies**.
- Algorithme de **gradient projeté**.
- Projection centrée en 0 sur

$$\mathcal{S}_k = \{(x_1, \dots, x_k); 0 \leq x_i \text{ et } x_1 + \dots + x_k = 1\},$$

et non projection orthogonale

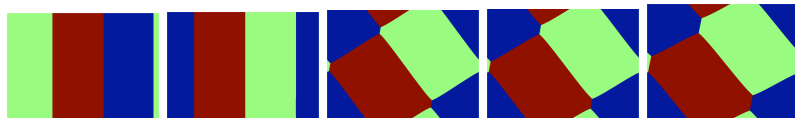
- Approche **itérative** : gradient projeté une première fois sur une grille grossière, on **raffine** en divisant le pas par deux, on **interpole** le résultat sur la nouvelle grille, on lui applique le gradient projeté, etc.
- Après optimisation, on **construit** les domaines de la partition, et on évalue son énergie **sans relaxation**.

- k -partitions minimales de $T(1, b)$, pour b variable, avec $k \in \{3, 4, 5\}$.
- On a $b_4 = 1/2$. Test des conjectures

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7071; \\ b_5 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \simeq 0.4082. \end{aligned}$$

- On veut aussi étudier les partitions minimales au voisinage de ces valeurs de transition conjecturées.
- Les calculs suivants sont faits avec $p = 5$, $\varepsilon = 10^{-4}$. On part d'une grille 32×32 et on fait trois doublements.

3-partitions



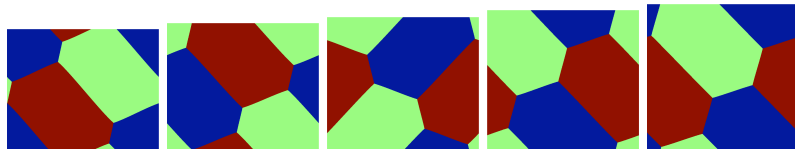
(a) $b = 0.70$

(b) $b = 0.71$

(c) $b = 0.72$

(d) $b = 0.73$

(e) $b = 0.76$



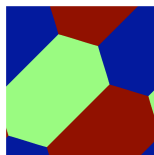
(f) $b = 0.80$

(g) $b = 0.84$

(h) $b = 0.88$

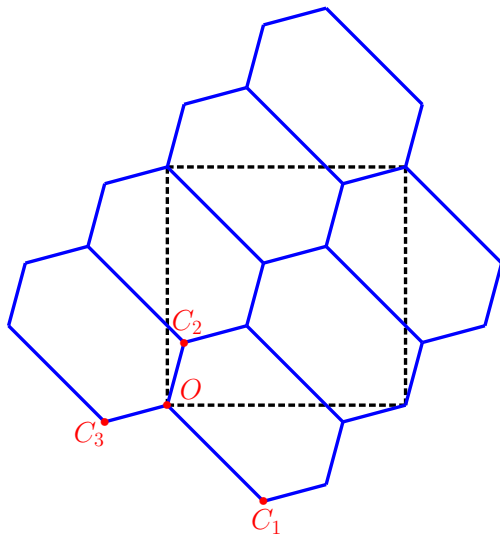
(i) $b = .92$

(j) $b = 0.96$



(k) $b = 1$

Pavages hexagonaux



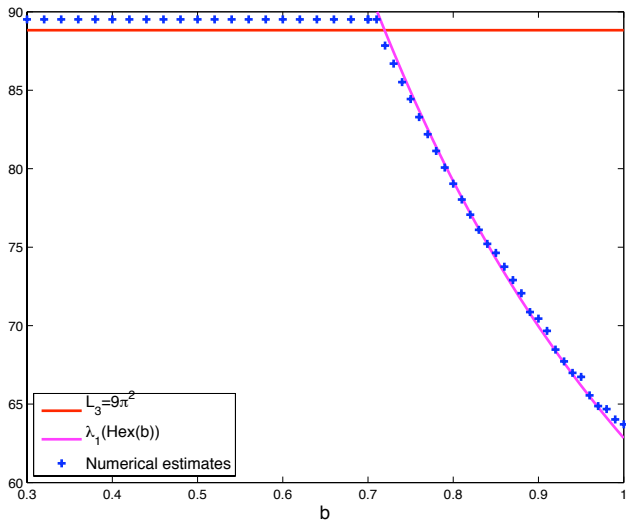


Figure : Majoration de $\mathcal{L}_3(T(1, b))$ en fonction de b .

Partitions nodales de $T(1, 1/2)$ associée à $\lambda_4 = 16\pi^2$.

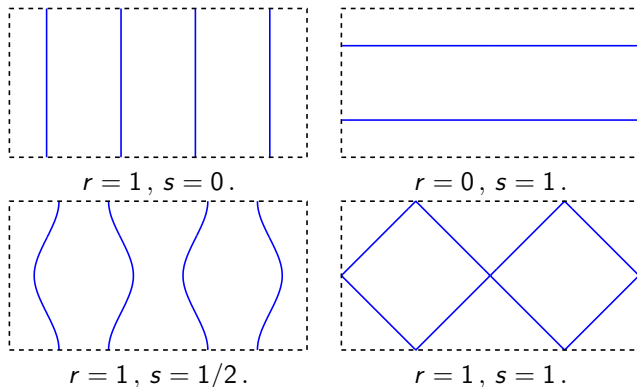


Figure : Lignes nodales de $u(x, y) = r \cos(4\pi x) + s \cos(4\pi y)$.

4-partitions



(a) $b = 0.49$

(b) $b = 0.50$

(c) $b = 0.51$

(d) $b = 0.52$

(e) $b = 0.53$



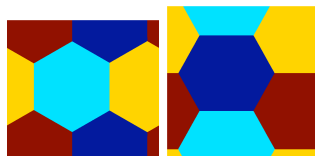
(f) $b = 0.54$

(g) $b = 0.55$

(h) $b = 0.60$

(i) $b = 0.7$

(j) $b = 0.8$



(k) $b = 0.9$

(l) $b = 1$

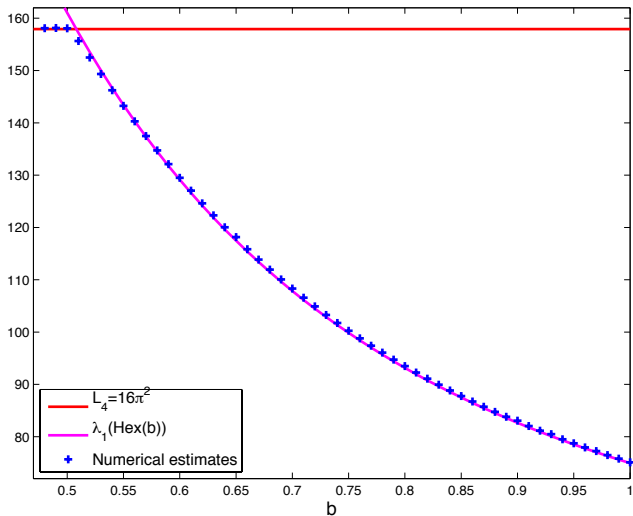


Figure : Majoration de $\mathcal{L}_4(T(1, b))$ en fonction de b .

5-partitions



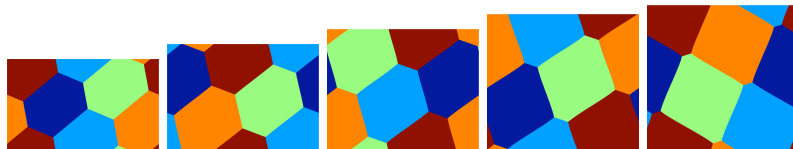
(a) $b = 0.40$

(b) $b = 0.41$

(c) $b = 0.42$

(d) $b = 0.43$

(e) $b = 0.5$



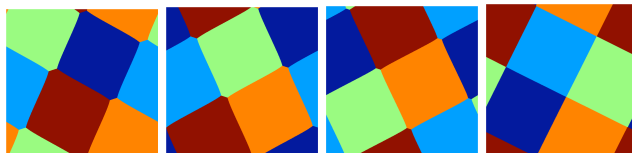
(f) $b = 0.6$

(g) $b = 0.7$

(h) $b = 0.8$

(i) $b = 0.9$

(j) $b = 0.96$



(k) $b = 0.97$

(l) $b = 0.98$

(m) $b = 0.99$

(n) $b = 1$

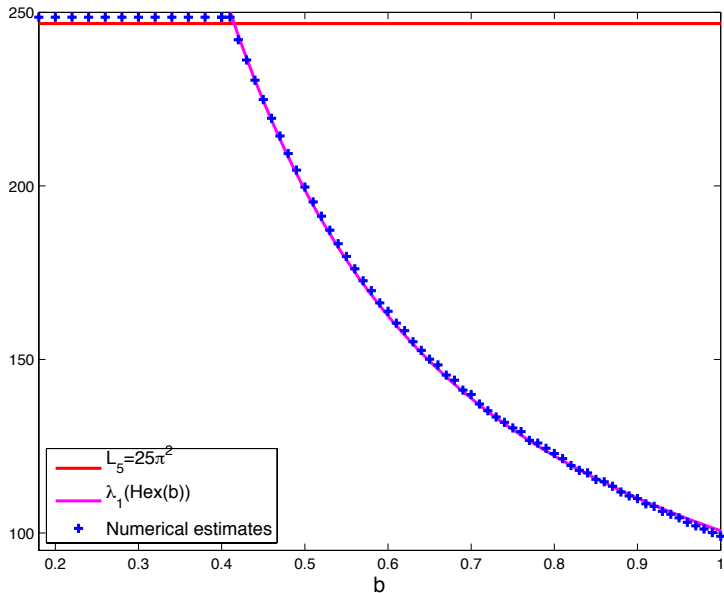


Figure : Majoration de $\mathcal{L}_5(T(1, b))$ en fonction de b .

5-partition candidate sur $T(1,1)$

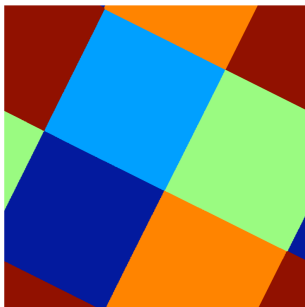


Figure : $\Lambda = 99.05$

On obtient, pour une partition de $T(1,1)$ en cinq carrés, l'énergie
 $\Lambda_5^{sq} = 10\pi^2 \simeq 98.6960$.