

# Valeurs propres des opérateurs d'Aharonov-Bohm

Corentin Léna

Université Paris-Sud

19 Mars 2014

# Plan

- 1 Définition des opérateurs
- 2 Invariance de jauge et domaine de forme
- 3 Continuité
- 4 Analyticité et points critiques
- 5 Partitions minimales
- 6 Exemples

- 1 Définition des opérateurs
- 2 Invariance de jauge et domaine de forme
- 3 Continuité
- 4 Analyticité et points critiques
- 5 Partitions minimales
- 6 Exemples

# Notations

Dans la suite,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ayant une frontière suffisamment régulière (on peut par exemple supposer que  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$  par morceaux).

Si  $D$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , on désigne par  $(\lambda_k^D(D))_{k \geq 1}$  les valeurs propres du laplacien de Dirichlet sur  $D$ , rangées par ordre croissant et comptées avec multiplicité, i.e.

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_k^D(D) u \text{ in } D, \\ u &= 0 \text{ on } \partial D. \end{cases}$$

Soit  $\omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

- On appelle **potentiel vecteur** sur  $\omega$  un champs de vecteur  $\mathbf{A} \in C^\infty(\omega, \mathbb{R}^2)$ .
- On appelle **hamiltonien magnétique** associé à  $\mathbf{A}$  l'extension de Friedrichs de l'opérateur différentiel  $(-i\nabla - \mathbf{A})^2$  défini sur  $C_c^\infty(\omega)$ . On le note  $-\Delta_{\mathbf{A}}$ .
- On désigne par  $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}^1$  le domaine de forme de  $-\Delta_{\mathbf{A}}$ .

# Opérateur d'Aharonov-Bohm

- Pour tout  $X_0 \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  on définit sur  $\mathbb{R}^2 \setminus X_0$ , dans les coordonnées polaires centrées en  $X_0$ ,

$$\mathbf{A}_\alpha^{X_0}(x) = \frac{\alpha}{r} \mathbf{e}_\theta.$$

- Pour  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{R}^{2N}$  (que l'on suppose distincts pour le moment) et  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ , on définit, sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{X_1, \dots, X_N\}$ ,

$$\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}(x) = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_{\alpha_i}^{X_i}(x)$$

et on note  $\Omega_{\mathbf{X}} = \Omega \setminus \{X_1, \dots, X_N\}$ .

- Le hamiltonien magnétique associé au potentiel vecteur  $\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}$  est appelé **opérateur d'Aharonov-Bohm** associé à  $\mathbf{X}$  et  $\alpha$ . On le note  $-\Delta_\alpha^{\mathbf{X}}$ .
- On note  $\mathcal{H}_0^1(\mathbf{X}, \alpha)$  le domaine de forme de  $-\Delta_\alpha^{\mathbf{X}}$ .

# Interprétation physique

- On associe à  $\mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}$  un **champ magnétique** (qui est une mesure)

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}} = \partial_{x_1} A_{\alpha,2}^{\mathbf{X}} - \partial_{x_2} A_{\alpha,1}^{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{X_i}.$$

- Si  $B_i$  est un disque centré en  $X_i$ , tel que  $X_j \notin B_i$  pour  $j \neq i$ ,

$$\alpha_i = \frac{1}{2\pi} \int_{B_i} \mathbf{B}.$$

Le coefficient  $\alpha_i$  est appelé **flux (magnétique) normalisé** en  $X_i$ .

- Pour tout lacet  $\gamma$  contenu dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i=1}^N \{X_i\}$ ,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}}(s) ds = 2\pi \sum_{i=1}^N \text{ind}_{\gamma}(X_i) \alpha_i,$$

avec  $\text{ind}_{\gamma}(X_i)$  l'**indice** de  $\gamma$  par rapport à  $X_i$ .

# Plan

- 1 Définition des opérateurs
- 2 Invariance de jauge et domaine de forme
- 3 Continuité
- 4 Analyticité et points critiques
- 5 Partitions minimales
- 6 Exemples

# Changement de jauge

- Un **changement de jauge** sur  $\omega$  est une transformation des couples champ de vecteur-fonction  $(\mathbf{A}, u) \mapsto (\mathbf{A}^*, u^*)$  telle que

$$\begin{cases} \mathbf{A}^* &= \mathbf{A} - i \frac{\nabla \psi}{\psi}, \\ u^* &= \psi u, \end{cases}$$

avec  $\psi \in C^\infty(\omega, \mathbb{C})$  et  $|\psi| = 1$ .

- $\psi$  est appelée **fonction de jauge** sur  $\omega$ .
- On dit que deux potentiels magnétiques sont **équivalents** lorsque le second est l'image du premier par un changement de jauge.
- Un changement de jauge laisse invariant le **champ magnétique**  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  et la **distribution de probabilité**  $|u|^2$ .



# Invariance de jauge

## Lemme

Soit  $\mathbf{A} \in C^\infty(\omega, \mathbb{R}^2)$ . Il est équivalent à 0 si, et seulement si,

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \mathbf{A}(s) ds$$

est un entier pour tout lacet  $\gamma$  contenu dans  $\omega$ .

## Proposition

Si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}^*$  sont deux potentiels magnétiques de classe  $C^\infty(\omega, \mathbb{R}^2)$  équivalents les opérateurs  $-\Delta_{\mathbf{A}}$  et  $-\Delta_{\mathbf{A}^*}$  sont unitairement équivalents.

Dans le cas d'opérateurs d'Aharonov-Bohm avec des pôles fixes, l'invariance de jauge nous permet d'ôter les pôles de flux entier. Dans le cas de pôles mobiles, plusieurs flux non-entiers peuvent s'ajouter pour donner un flux entier à la limite.

## Domaine de forme

Théorème (Laptev - Weidl, 1998, Alziary - Fleckinger-Pellé - Takáč, 2003)

Soit  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Pour tout  $0 < \rho$  et  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{X\})$ ,

$$\int_{B(X,\rho)} \frac{|u|^2}{|x - X|^2} dx \leq \text{dist}(\alpha, \mathbb{Z})^{-2} \int_{B(X,\rho)} |(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^X) u|^2 dx.$$

En l'absence de flux entier, cette inégalité implique l'inclusion de  $\mathcal{H}_0^1(X, \alpha)$  dans  $H^1(\Omega)$ . Dans le cas général, on utilise des changements de jauge locaux pour montrer le résultat suivant.

### Proposition

Le domaine de forme  $\mathcal{H}_0^1(X, \alpha)$  est d'injection compacte dans  $L^2(\Omega)$ .

# Formulation du problème

- Le domaine de forme  $\mathcal{H}_0^1(\mathbf{X}, \alpha)$  étant d'injection compacte dans  $L^2(\Omega)$ , l'opérateur  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  est à résolvante compacte. Son spectre consiste donc en des valeurs propres de multiplicité finie.
- On désigne par  $(\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha))_{k \geq 1}$  la suite de ces valeurs propres, rangée par ordre croissant et comptées avec multiplicité.
- On définit (pour tout  $k$ ) la fonction  $\mathbf{X} \mapsto \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$  sur  $\mathbb{R}^{2N}$ . On pose par exemple  $\lambda_k((X, X, Y), (\alpha, \beta, \gamma)) = \lambda_k((X, Y), (\alpha + \beta, \gamma))$ .
- On étudie à  $k$  et  $\alpha$  fixés la régularité des fonctions  $\mathbf{X} \mapsto \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$ .

# Plan

- 1 Définition des opérateurs
- 2 Invariance de jauge et domaine de forme
- 3 Continuité**
- 4 Analyticité et points critiques
- 5 Partitions minimales
- 6 Exemples

# Continuité des valeurs propres

## Théorème

Pour tout entier  $k \geq 1$  and tout  $\alpha \in \mathbb{R}^N$ , la fonction  $\mathbf{X} \mapsto \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$  is continue sur  $\mathbb{R}^{2N}$ .

## Corollaire

On suppose que  $\Omega$  est simplement connexe, que  $\alpha \in \mathbb{R}$ , que  $X_0 \in \partial\Omega$ , et que  $X \in \Omega$ . Alors

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \lambda_k(X, \alpha) = \lambda_k^D(\Omega).$$

## Corollaire

On suppose que  $\Omega$  est simplement connexe,  $X_0 \in \Omega$  et que  $X, Y \in \Omega$ . Alors

$$\lim_{X, Y \rightarrow X_0} \lambda_k((X, Y), (1/2, 1/2)) = \lambda_k^D(\Omega).$$

## Proposition (caractérisation du domaine de forme)

On a

$$\mathcal{H}_0^1(\mathbf{X}, \alpha) = \{u \in L^2(\Omega); (-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}})u \in L^2(\Omega) \text{ et } \gamma_0 u = 0\},$$

avec  $\gamma_0$  l'opérateur de trace usuel, éventuellement conjugué par un changement de jauge.

## Lemme (inégalité de non-concentration)

Il existe une constante  $C \geq 0$  telle que,

$$\|u\|_{L^2(B(x_0, r) \cap \Omega)}^2 \leq C r \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}})u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

pour tout  $x_0 \in \Omega$ ,  $r > 0$  et  $u \in \mathcal{H}_0^1(\mathbf{X}, \alpha)$ ,

Soit  $(\mathbf{X}^{(n)})_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^{2N}$  telle que  $\mathbf{X}^{(n)} \rightarrow \mathbf{X}$ . On veut prouver que pour tout  $k \geq 1$ ,  $\lambda_k(\mathbf{X}^{(n)}, \alpha) \rightarrow \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$ .

## Lemme (limsup)

Pour tout  $k \geq 1$ ,  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \lambda_k(\mathbf{X}^{(n)}, \alpha) \leq \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$ .

D'après la caractérisation variationnelle

$$\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha) = \inf_{\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C_c^\infty(\Omega_X)} \max_{u \in \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \setminus \{0\}} \frac{\|(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}})u\|^2}{\|u\|^2}.$$

On choisit  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C_c^\infty(\Omega_X)$  tel que

$$\max_{u \in \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \setminus \{0\}} \frac{\|(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}})u\|^2}{\|u\|^2} \leq \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha) + \varepsilon.$$

On montre alors que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \lambda_k(\mathbf{X}^{(n)}, \alpha) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \max_{u \in \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \setminus \{0\}} \frac{\|(-i\nabla - \mathbf{A}_\alpha^{\mathbf{X}^{(n)}})u\|^2}{\|u\|^2} \leq \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha) + \varepsilon.$$

## Lemme (extraction)

Soit  $(\lambda^{(n)})$  une suite bornée de valeurs propres de  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}^{(n)}}$  et  $(u^{(n)})$  une suite de fonctions propres normalisées associée. Il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u \in \mathcal{H}_0^1(\mathbf{X}, \alpha)$  tels que, pour une sous-suite,

- i.  $\lambda^{(n_p)} \rightarrow \lambda$ ,
- ii.  $u^{(n_p)} \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$ ,
- iii.  $u$  est une fonction propre de  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  associée à  $\lambda$ .

On montre enfin que  $\lambda_1(\mathbf{X}^{(n)}, \alpha) \rightarrow \lambda_1(\mathbf{X}, \alpha)$ . D'après le lemme sur la limsup,  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1(\mathbf{X}^{(n)}, \alpha) \leq \lambda_1(\mathbf{X}, \alpha)$ . On en déduit que  $(\lambda_1(\mathbf{X}^{(n)}, \alpha))$  est bornée. Le lemme d'extraction implique alors que toute valeur d'adhérence de  $(\lambda_1(\mathbf{X}^{(n)}, \alpha))$  est une valeur propre de  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ , et donc  $\lambda_1(\mathbf{X}, \alpha) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1(\mathbf{X}^{(n)}, \alpha)$ .

On traite les  $k > 1$  par récurrence.



# Plan

- 1 Définition des opérateurs
- 2 Invariance de jauge et domaine de forme
- 3 Continuité
- 4 Analyticité et points critiques**
- 5 Partitions minimales
- 6 Exemples

# Analyticité des valeurs propres

On pose  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  et  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  les vecteurs de la base canonique.

## Théorème

Soient  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N}$  et  $k \geq 1$  un entier tels que  $X_i \notin \partial\Omega$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ ,  $X_i \neq X_j$  pour tout  $i \neq j$  et  $\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$  est simple. La fonction

$$(t_1, t_2, \dots, t_{2N-1}, t_{2N}) \mapsto \lambda_k((X_1 + t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2, \dots, X_N + t_{2N-1}\mathbf{e}_1 + t_{2N}\mathbf{e}_2), \alpha)$$

est donc analytique au voisinage de 0.

- S'il n'y qu'un pôle, on se ramène par translation à un mouvement de la frontière et on peut utiliser la formule d'Hadamard.
- Si  $N \geq 2$ , on ne peut pas fixer les pôles par une translation. On construit une famille de difféomorphismes adaptés afin de reformuler le problème comme une perturbation d'un opérateur d'Aharonov-Bohm dont les pôles sont fixes.
- On montre que cette perturbation est relativement bornée et on applique la théorie de Kato-Rellich.

## Fonctions $K_{\mathbf{X}}$ -réelles

On se concentre sur le cas où  $\alpha_j \in \mathbb{Z} + 1/2$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ . D'après la condition sur les circulations,  $2\mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  est équivalent à 0. Il existe une fonction de jauge  $\psi$  définie sur  $\Omega_{\mathbf{X}}$  telle que  $-i\bar{\psi}\nabla\psi = 2\mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ . On fixe une telle fonction  $\psi$ . On définit  $K_{\mathbf{X}}$  par  $K_{\mathbf{X}}u = \psi\bar{u}$ . On dit que fonction  $u$  est  $K_{\mathbf{X}}$ -réelle si  $K_{\mathbf{X}}u = u$ .

Un calcul direct montre que  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}} \circ K_{\mathbf{X}} = K_{\mathbf{X}} \circ (-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}})$ . On peut donc choisir une base de fonction propres  $K_{\mathbf{X}}$ -réelles de  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$ .

L'ensemble des zéros d'une fonction propre  $K_{\mathbf{X}}$ -réelle de  $-\Delta_{\alpha}^{\mathbf{X}}$  est formé de lignes nodales.

### Théorème (Alziary - Fleckinger-Pellé - Takáč, 2003)

Soit  $u$  une fonction propre  $K_{\mathbf{X}}$ -réelle associée à  $\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$ . Soit  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires centrées en  $X_i$ . Il existe un entier  $m \geq 0$  et des fonctions de classe  $C^1$   $f$  et  $g$  tels que  $f(X_i) \neq 0$ ,

$$u(x) = r^{m+1/2}f(x) \quad \text{and} \quad (-i\nabla - \mathbf{A}_{\alpha}^{\mathbf{X}}(x))u(x) = r^{m-1/2}g(x).$$

De plus,  $2m + 1$  est le nombre de lignes nodales arrivant en  $X_i$ .

# Interprétation géométrique I

La définition précédente s'interprète géométriquement. On peut construire revêtement à deux feuillet  $\Pi : \hat{\Omega}_X \rightarrow \Omega_X$  de  $\Omega_X$ , muni d'une involution  $\sigma$  telle que  $\Pi \circ \sigma = \Pi$  ( $\sigma$  échange les deux feuillet du revêtement).

On dit que  $u \in L^2(\hat{\Omega}_X)$  est **symétrique** si  $u \circ \sigma = u$  et **antisymétrique** si  $u \circ \sigma = -u$ . On désigne respectivement par  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{A}$  le sous-espace des fonctions  $L^2$  symétriques et antisymétrique. On a  $L^2(\hat{\Omega}_X) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ .

On note  $-\hat{\Delta}$  le relèvement du laplacien sur  $\hat{\Omega}_X$ . Comme  $-\hat{\Delta} \circ \sigma = \sigma \circ (-\hat{\Delta})$ ,  $-\hat{\Delta}$  laisse invariants les sous-espaces  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{A}$ . On appelle **valeurs propres symétriques** les valeurs propres de  $-\hat{\Delta}|_{\mathcal{S}}$  sur  $\hat{\Omega}_X$  avec des conditions de Dirichlet au bord, et **valeurs propres antisymétriques** celle de  $-\hat{\Delta}|_{\mathcal{A}}$ .

Les valeurs propres **symétriques** de  $-\hat{\Delta}$  sont  $(\lambda_k^D(\Omega))_{k \geq 1}$  et les valeurs propres **antisymétriques** sont  $(\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha))_{k \geq 1}$ . De plus, les fonctions propres  $K_X$ -réelles de  $-\Delta_X$  correspondent au fonctions propres **antisymétriques réelles** de  $-\hat{\Delta}$ .

## Interprétation géométrique II

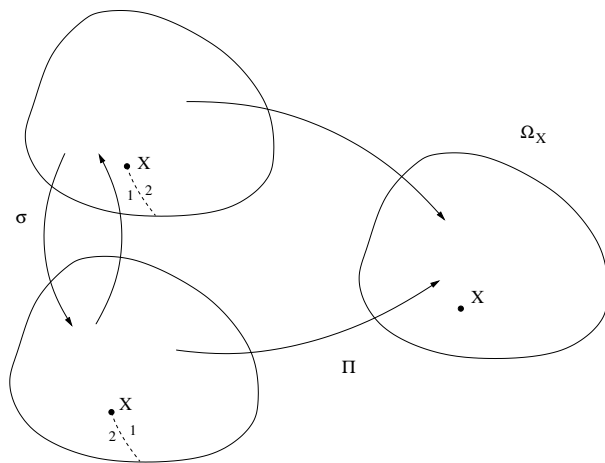


Figure: Revêtement à deux feuillets du domaine initial.

# Points critiques des valeurs propres

## Théorème

Soit  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N}$ . On pose  $\alpha = (1/2, \dots, 1/2) \in \mathbb{R}^N$ . On fixe  $1 \leq i \leq N$ , avec  $X_i \in \Omega$  et  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ . Pour tout  $k \geq 1$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on définit

$$\mathbf{X}(t) = (X_1, \dots, X_i + t\mathbf{v}, \dots, X_N)$$

et  $\lambda_k(t) = \lambda_k(\mathbf{X}(t), \alpha)$ . On suppose que la valeur propre  $\lambda_k(0)$  est *simple* et admet une fonction propre  $K_{\mathbf{X}}$ -réelle dont au moins *trois* lignes nodales arrivent en  $X_i$ . Alors  $\lambda'_k(0) = 0$ .

Soit  $u$  une telle fonction propre. Pour démontrer le résultat, on construit une famille de difféomorphismes  $\Phi_{h,t}$  qui dépend d'un paramètre supplémentaire  $h > 0$ . À l'aide de la formule de Feynman-Hellmann, on calcule  $\lambda'_k(0)$  (qui est indépendant de  $h$ ) comme une intégrale  $I(h)$  dépendant de  $h$  (intégrale sur un disque de rayon  $h$  centré en  $X_i$  d'une fonction qui dépend de  $u$ ). On utilise alors le développement  $u$  au voisinage de 0, avec  $m \geq 1$ , pour montrer que  $\lim_{h \rightarrow 0} I(h) = 0$ .

# Plan

- 1 Définition des opérateurs
- 2 Invariance de jauge et domaine de forme
- 3 Continuité
- 4 Analyticité et points critiques
- 5 Partitions minimales**
- 6 Exemples

# Le problème des partitions minimales

- Une  $k$ -partition  $\mathcal{D}$  de  $\Omega$ , avec  $k \geq 1$  un entier, est un ensemble  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  de  $k$  sous-ensembles disjoints, ouverts et connexes de  $\Omega$ .
- L'énergie d'une  $k$ -partition  $\mathcal{D}$  est défini comme

$$\Lambda_k(\mathcal{D}) = \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_1^{\mathcal{D}}(D_i)$$

- On note

$$\mathfrak{L}_k(\Omega) = \inf \{ \Lambda_k(\mathcal{D}) ; \mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\} \text{ } k\text{-partition of } \Omega \} .$$

- La  $k$ -partition  $\mathcal{D}$  est dite **minimale** si

$$\Lambda_k(\mathcal{D}) = \mathfrak{L}_k(\Omega) .$$



# Propriétés des partitions minimales

Travaux de D. Bucur, G. Buttazzo, A. Henrot (1998), M. Conti, S. Terracini, G. Verzini (2005), L. A. Caffarelli, F. H. Lin (2007), B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, S. Terracini (2009).

## Théorème

Pour tout entier  $k \geq 1$ , il existe une  $k$ -partition minimale de l'ouvert  $\Omega$ .

## Proposition

Si  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  est une partition minimale de  $\Omega$ , alors

$$\lambda_1^D(D_1) = \dots = \lambda_1^D(D_k) \text{ et } \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^k \bar{D}_i.$$

On définit la **frontière** d'une partition minimale  $\mathcal{D}$  par

$$N(\mathcal{D}) = \overline{\bigcup_{i=1}^k \partial D_i} \cap \Omega.$$

# Régularité de la frontière

- (i) L'ensemble  $\Omega \cap N(\mathcal{D})$  est localement une courbe  $\mathcal{C}^{1,1-}$ , sauf en un ensemble fini de points  $S_{int}$ .
- (ii) À chaque point  $x \in S_{int}$  est associé un entier  $\nu(x) \geq 3$  tel que dans un voisinage de  $x$ , l'ensemble  $N(\mathcal{D})$  est la réunion de  $\nu(x)$  demi-courbes de classe  $\mathcal{C}^{1,+}$  ayant leur extrémité en  $x$ .
- (iii) L'ensemble  $S_{bd} = \partial\Omega \cap N(\mathcal{D})$  est fini. Si  $z \in S_{bd}$ , il existe un entier  $\rho(z) \geq 1$  tel qu'au voisinage de  $z$ , l'ensemble  $N(\mathcal{D})$  consiste en  $\rho(z)$  demi-courbes  $\mathcal{C}^{1,+}$  contenues dans  $\bar{\Omega}$  et qui rencontrent la frontière  $\partial\Omega$  en  $z$ .
- (iv) En chaque point singulier de  $\Omega \cap N(\mathcal{D})$ , les demi-courbes forment des angles égaux.
- (v) En chaque point de  $N(\mathcal{D}) \cap \partial\Omega$  les demi-courbes et  $\partial\Omega$  forment des angles égaux.

## Liens avec les fonctions propres du laplacien

Si  $u$  est une fonction propre du laplacien de Dirichlet sur  $\Omega$ , on note  $N(u) = \{x \in \Omega; u(x) = 0\}$  l'ensemble nodal de  $u$  et on appelle domaine nodal de  $u$  une composante connexe de  $\Omega \setminus N(u)$ . On note  $\nu(u)$  le nombre de domaines nodaux de  $u$ .

### Théorème (Courant)

Si  $u$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda_k^D(\Omega)$ ,  $\nu(u) \leq k$ .

On dit qu'une fonction propre  $u$  associée à la valeur propre  $\lambda_k(\Omega)$  est Courant-strictes lorsque

$$\nu(u) = \inf\{\ell; \lambda_\ell^D(\Omega) = \lambda_k^D(\Omega)\}.$$

### Théorème (Helffer - Hoffmann-Ostenhof - Terracini, 2009)

L'ensemble des domaines nodaux d'une fonction propre est une partition minimale si, et seulement si, la fonction propre est Courant-strictes.

# Caractérisation magnétique des partitions minimales

## Théorème (Helffer - Hoffmann-Ostenhof, 2013)

On suppose que  $\Omega$  est difféomorphe à un disque percé d'un nombre fini de trou. On suppose que  $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$  est une  $k$ -partition minimale de  $\Omega$ . Il existe un nombre fini de points  $X_1, \dots, X_N$  dans  $\mathbb{R}^2$  tels que  $\mathcal{D}$  est la **partition nodale** associée à une fonction propre  $K_X$ -réelle  $u$  de l'opérateur  $-\Delta_{\alpha}^X$ , avec

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$$

et

$$\alpha = (1/2, \dots, 1/2).$$

De plus, la fonction propre  $u$  est associée à la valeur propre  $\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$ .

Pour construire le potentiel magnétique, on doit ajouter des pôles :

- à chaque point singulier de la frontière de  $\mathcal{D}$  où arrivent un nombre impair de courbes,
- dans chaque trou dont la frontière rencontre un nombre impair de courbes.

## Théorème

On suppose que  $\Omega$  est difféomorphe à un disque percé d'un nombre fini de trous,  $k$  un entier positif et  $\mathcal{D}$  une  $k$ -partition minimale de  $\Omega$ . On note  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  et  $\alpha = (1/2, \dots, 1/2)$  des pôles et flux définis par la caractérisation magnétique. Supposons de plus que  $\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$  est simple. Le point  $\mathbf{X}$  est alors un point critique de la fonction  $\mathbf{Y} \mapsto \lambda_k(\mathbf{Y}, \alpha)$ .

# Preuve du théorème

On rappelle que  $\mathbf{Y} \mapsto \lambda_k(\mathbf{Y}, \alpha)$  est **analytique** au voisinage de  $\mathbf{X}$  et que, d'après la caractérisation magnétique, il existe une fonction propre  $K_{\mathbf{X}}$ -réelle  $u$  associée à la valeur propre  $\lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$  dont la partition nodale est  $\mathcal{D}$ .

Il suffit de montrer que le gradient de  $\mathbf{Y} \mapsto \lambda_k(\mathbf{Y}, \alpha)$  par rapport à chaque variable  $Y_i$  est **nul** en  $\mathbf{X}$ .

- Si  $X_i \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ , on a  $\lambda_k(\mathbf{Y}, \alpha) = \lambda_k(\mathbf{X}, \alpha)$  pour tout  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$  tel que  $Y_j = X_j$  pour  $j \neq i$  et  $Y_i$  est dans la même composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  que  $X_i$  (on utilise un changement de jauge).
- Si  $X_i \in \Omega$ , au moins trois lignes nodales de  $u$  arrivent en  $X_i$ . Ainsi, d'après notre résultat,  $X_i$  est un **point critique** de la fonction

$$Y_i \mapsto \lambda_k((X_1, \dots, X_{i-1}, Y_i, X_{i+1}, \dots, X_N), \alpha).$$

# Plan

- 1 Définition des opérateurs
- 2 Invariance de jauge et domaine de forme
- 3 Continuité
- 4 Analyticité et points critiques
- 5 Partitions minimales
- 6 Exemples

# Domaines symétriques

On suppose que  $\Omega$  est simplement connexe et que la droite  $\{x_2 = 0\}$  est **axe de symétrie**.

On considère un opérateur d'Aharonov-Bohm à un pôle  $X = (x, 0) \in \{x_2 = 0\}$  et  $\alpha = 1/2$ .

On note  $\Omega^+ = \Omega \cap \{x_2 > 0\}$ ,  $\Gamma^+ = \partial\Omega \cap \{x_2 > 0\}$  et  $\Omega \cap \{x_2 = 0\} = (A, B)$ , avec  $A = (a, 0)$  et  $B = (b, 0)$ . On considère maintenant deux problèmes aux valeurs propres avec des conditions au bord mixtes.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda_k^{DN}(x)u \text{ in } \Omega^+, \\ u = 0 \text{ on } [A, X] \cup \Gamma^+, \\ \partial_n u = 0 \text{ on } (X, B); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda_k^{ND}(x)u \text{ in } \Omega^+, \\ \partial_n u = 0 \text{ on } (A, X), \\ u = 0 \text{ on } [X, B] \cup \Gamma^+. \end{array} \right.$$

Le spectre  $-\Delta_{1/2}^X$  est la **réunion** des suites  $(\lambda_k^{DN}(x))_{k \geq 1}$  et  $(\lambda_k^{ND}(x))_{k \geq 1}$  (comptées avec multiplicités). Les fonctions propres réelles de  $-\Delta$  correspondent fonctions propres  $K_X$ -réelle de  $-\Delta_{1/2}^X$ .



## Exemple : secteur

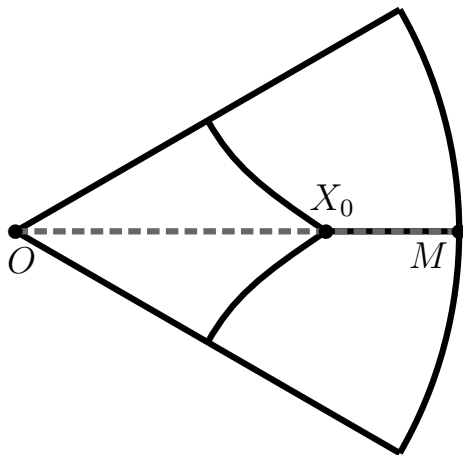


Figure: Problème d'Aharonov-Bohm avec symétrie.

## Proposition

Soit  $k \geq 1$  un entier. On suppose  $x_0 \in (a, b)$  tel que la valeur propre  $\lambda_k^{ND}(x_0)$  a une fonction propre réelle dont une *ligne nodale* rencontre  $\{x_2 = 0\}$  en  $X_0 = (x_0, 0)$ . On suppose de plus que  $\lambda_k^{ND}(x_0)$  est *simple* comme valeur propre de  $-\Delta_{1/2}^{X_0}$ . Alors  $x_0$  est un *point d'inflexion* de la fonction  $x \mapsto \lambda_k^{ND}(x)$ .

# Recherche d'une 3-partition minimale (V. Bonnaillie-Noël)

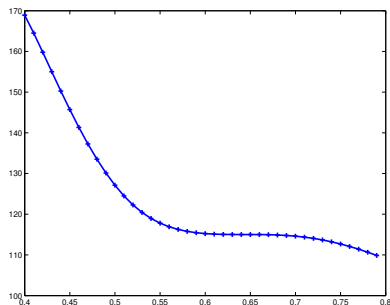


Figure: La valeur propre  $\lambda_2^{ND}(x)$  en fonction de  $x$ .

On voit un point d'inflexion en  $x \simeq 0.64$ , qui correspond à la rencontre de trois lignes nodales en  $X = (x, 0)$ .

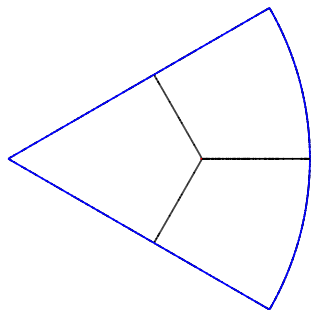


Figure: Lignes nodales de la troisième fonction propre d'un opérateur d'Aharonov-Bohm.

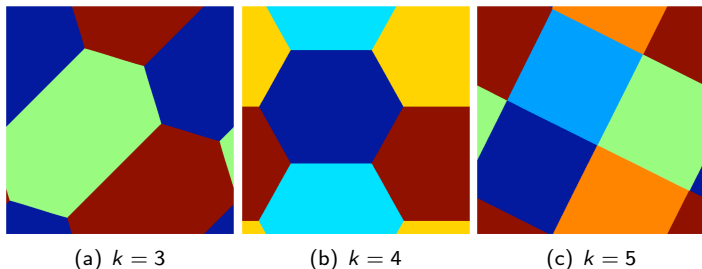


Figure:  $k$ -partitions du tore  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$  obtenues par optimisation numérique pour  $k = 3, 4, 5$ .

Peut-on montrer une caractérisation magnétique des partitions minimales du tore ? Il faut définir les opérateurs d’Aharonov-Bohm sur le tore (c.f. T. Iwai, Y. Yabu, 2006) et tenir compte du fait que le tore n’est pas simplement connexe.